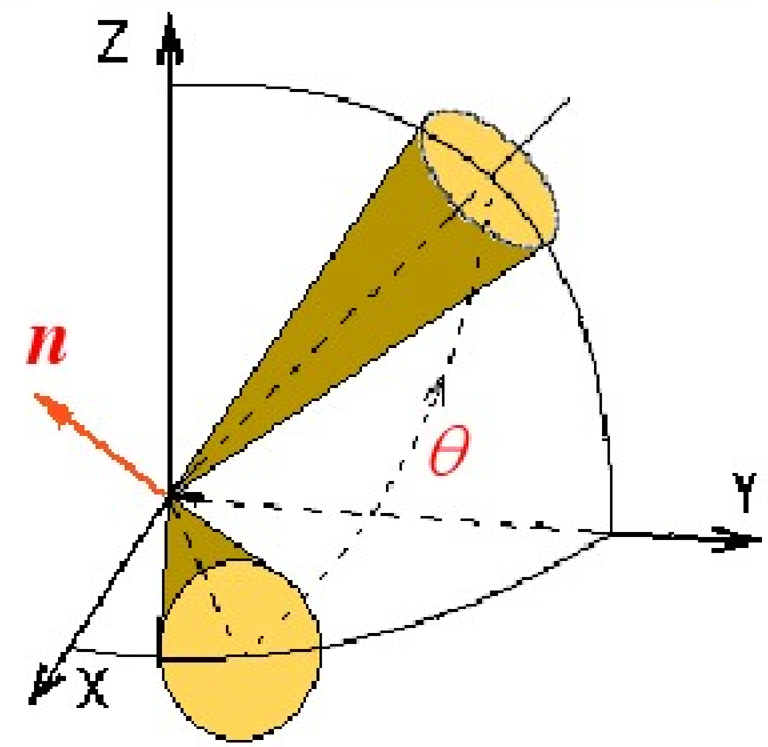
四元数与欧拉角

Outline

- 四元数的定义
- 四元数的运算
- 利用四元数进行旋转变换
- 利用四元数进行旋转合成

1.1*四元数(quaternions)定义

一个有固定点的刚体通过绕该点的某个轴转过特定角度可达到任何姿态



转轴的方向可以表示成一个单位矢量:

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k$$

则描述该转动的四元数可以表示成:

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \vec{n}$$
$$= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\alpha \cdot i + \sin\frac{\theta}{2}\cos\beta \cdot j + \sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma \cdot k$$

四元数既反映了转动的方向又反映了转动的幅值.

1.2 四元数的组成

四元数的表示：

$$q=\underbrace{\boxed{\cos\frac{\theta}{2}}}_{\lambda}+\underbrace{\boxed{\sin\frac{\theta}{2}\cos\alpha}}_{P_1}\cdot i+\underbrace{\boxed{\sin\frac{\theta}{2}\cos\beta}}_{P_2}\cdot j+\underbrace{\boxed{\sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma}}_{P_3}\cdot k$$

$$q=\lambda+P_1 i+P_2 j+P_3 k$$

λ ----- 标量部分

$P_1 i+P_2 j+P_3 k$ ---- 矢量部分

包括一个实数单位 ***1*** 和三个虚数单位 ***i, j, k***

另一种表示法： $q=(\lambda,\ P)$, ***P*** 代表矢量部分

Outline

- 四元数的定义
- 四元数的运算
- 利用四元数进行旋转变换
- 利用四元数进行旋转合成

2.1*加法和减法

$$q = \lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k$$

$$M = v + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$$

加法和减法：

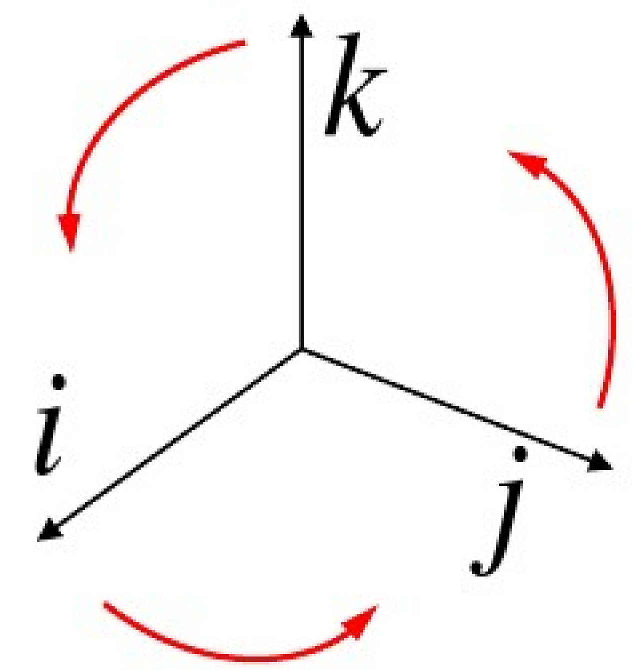
$$q \pm M = (\lambda \pm v) + (P_1 \pm \mu_1) i + (P_2 \pm \mu_2) j + (P_3 \pm \mu_3) k$$

或简写成：

$$q \pm M = (\lambda \pm v, \quad P \pm \mu)$$

2.2 虚数单位的乘法规则

$$q = \lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k$$



i*, *j*, *k **在乘法运算中的规则:**

$$i \circ i = j \circ j = k \circ k = -1$$

$$i \circ j = k = -j \circ i$$

$$j \circ k = i = -k \circ j$$

$$k \circ i = j = -i \circ k$$

对比 **Hamilton** 的公式　　$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

2.3*四元数乘法

$$q \circ M = (\lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k) \circ (v + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k)$$

$$\begin{aligned} &= (\lambda v - P_1\mu_1 - P_2\mu_2 - P_3\mu_3) \\ &+ (\lambda\mu_1 + P_1 v + P_2\mu_3 - P_3\mu_2) i \\ &+ (\lambda\mu_2 + P_2 v + P_3\mu_1 - P_1\mu_3) j \\ &+ (\lambda\mu_3 + P_3 v + P_1\mu_2 - P_2\mu_1) k \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & \lambda & -P_3 & P_2 \\ P_2 & P_3 & \lambda & -P_1 \\ P_3 & -P_2 & P_1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 \\ \mu_1 & v & \mu_3 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_3 & v & \mu_1 \\ \mu_3 & \mu_2 & -\mu_1 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

或简单地表示成：

$$q \circ M = \left(\lambda v - P \cdot \mu \quad \lambda\mu + vP + P \times \mu \right)$$

2.3 四元数乘法自定义函数

```
function [q1]=qmul(q, m)
lm=q(1); p1=q(2); p2=q(3); p3=q(4);

q1=[lm -p1 -p2 -p3
    p1  lm -p3  p2
    p2  p3  lm -p1
    p3 -p2  p1  lm]*m;
```

```
>> a=[1 2 2 3]';

>> b=[2 4 2 3]';

>> q=qmul(a,b)

q =

   -0.7796
    0.3282
    0.4924
    0.2052

>>
```

2.3*四元数乘法表示符号

$$q \circ M = (\lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k) \circ (v + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k)$$

※四元数乘法的符号　　$q \circ M \quad q \otimes M \quad q \cdot M \quad qM$

※关于交换率和结合律

$$q \circ M \neq M \circ q \qquad (q_1 \circ q_2) \circ q_3 = q_1 \circ (q_2 \circ q_3)$$

2.4*共扼和范数

共扼四元数的定义 ------- 两个四元数的标量部分相同，向量部分相反

$$q = \lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k \qquad q^* = \lambda - P_1 i - P_2 j - P_3 k$$

q 和 **q^*** 彼此互为四元数.

可以证明： $(q \circ h)^* = h^* \circ q^*$

四元数的范数 $\|q\|$ --- 定义成 $\|q\|^2 = q \circ q^* = \lambda^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$

若 $\|q\| = 1$ ，则 **q** 成为规范化的四元数

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\alpha \cdot i + \sin\frac{\theta}{2}\cos\beta \cdot j + \sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma \cdot k$$ 是规范化的

2.5*四元数的逆和除法

若 $q_1 \circ q_2 = 1$ 则 q_1 和 q_2 彼此互为逆, 写为

$$q_1 = q_2^{-1} \quad 和 \quad q_2 = q_1^{-1}$$

因为 $q \circ q^* = \|q\|^2 \Rightarrow q \circ \dfrac{q^*}{\|q\|^2} = 1 \Rightarrow q^{-1} = \dfrac{q^*}{\|q\|^2}$

$$\|q\| = 1 \Rightarrow q^{-1} = q^*$$

除法:

$$q \circ h = M \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} q &= M \circ h^{-1} \\ h &= q^{-1} \circ M \end{aligned}}$$

$\cancel{q = \dfrac{M}{h}}$ 或 $\cancel{h = \dfrac{M}{q}}$ 没有具体意义

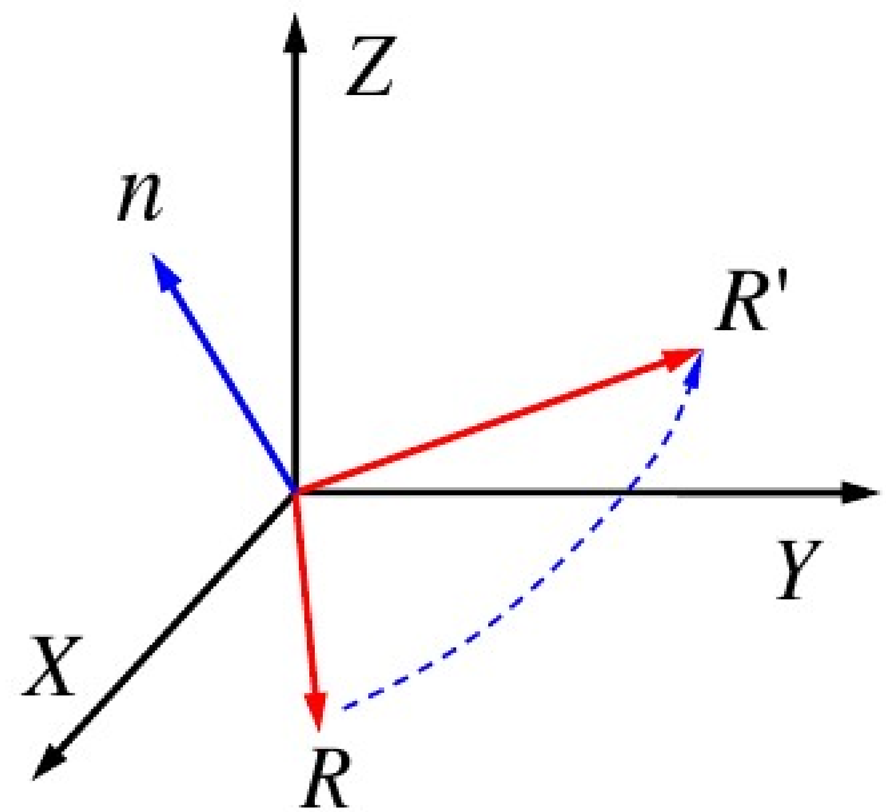
```
function [qi] =qinv(q)
% inverse of quaternion
qn=norm(q);
q(2:4)=-q(2:4);
qi=q/qn^2;
```

Outline

- 四元数的定义
- 四元数的运算
- 利用四元数进行旋转变换
- 利用四元数进行旋转合成

3.1*矢量的旋转

如果矢量 **R** 相对固定坐标系旋转, 并且该旋转可以用四元数 **q** 描述，新矢量记为 **R’**,



则 **R** 和 **R’** 之间的变换可以表示成下述四元数运算:

$$R' = q \circ R \circ q^{-1}$$

含义: 矢量 **R** 相对固定坐标系旋转，
旋转的角度和轴向由 **q** 决定

上述运算中, **R** 被当成一个标量部分为零的四元数，即：

$$R = 0 + R_x i + R_y j + R_z k$$

3.2*坐标系的旋转

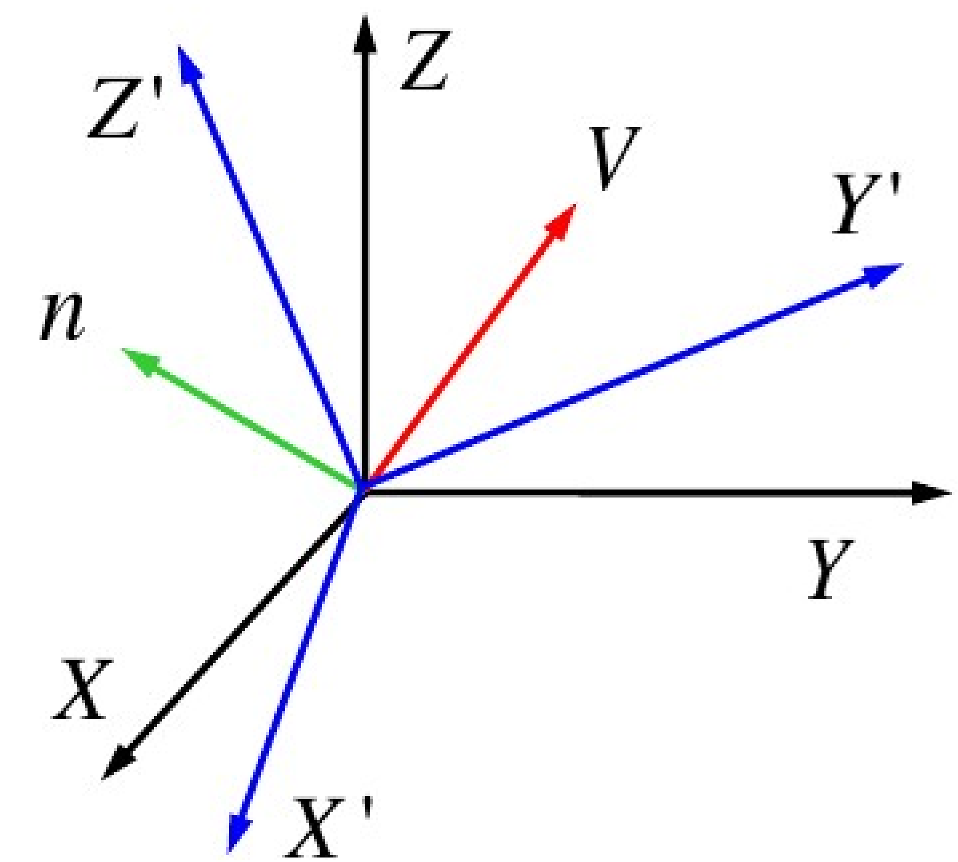
一个矢量 ***V*** 相对于坐标系 ***OXYZ*** 固定：

$$V = xi + yj + zk$$

从坐标系 ***OXYZ*** 转动了 ***q***, 得到一个新坐标系 ***OX'Y'Z'*** .

V 分解在新坐标系 ***OX'Y'Z'*** 中

$$V = x'i' + y'j' + z'k'$$



矢量 ***V*** 在两个坐标系之间的坐标变换:

记: $V_e' = x'i + y'j + z'k$ $\quad V_e = xi + yj + zk$

则 $\boxed{V_e' = q^{-1} \circ V_e \circ q}$

V_e 和 V_e' 分别称为 ***V*** 在两个坐标系中的映像.

3.3 四元数和方向余弦

$V_e' = q^{-1} \circ V_e \circ q$ ---- 表示坐标系旋转, 其中

$$V_e = xi + yj + zk$$

$$V_e' = x'i + y'j + z'k$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

q 和 C 之间是什么关系？

假设 $q = \lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k$

$q^{-1} = \lambda - P_1 i - P_2 j - P_3 k$ 则

$$\begin{aligned} V_e' &= x'i + y'j + z'k \\ &= (\lambda - P_1 i - P_2 j - P_3 k) \circ (0 + xi + yj + zk) \circ (\lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k) \end{aligned}$$

应用四元数乘法, 得到

3.3 四元数和方向余弦

$$V_e' = x'i + y'j + z'k$$

$$= (\lambda - P_1 i - P_2 j - P_3 k) \circ (0 + xi + yj + zk) \circ (\lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x' &= (\lambda^2 + P_1^2 - P_2^2 - P_3^2)x + 2(P_1P_2 + \lambda P_3)y + 2(P_1P_3 - \lambda P_2)z \\ y' &= 2(P_1P_2 - \lambda P_3)x + (\lambda^2 + P_2^2 - P_1^2 - P_3^2)y + 2(P_2P_3 + \lambda P_1)z \\ z' &= 2(P_1P_3 + \lambda P_2)x + 2(P_2P_3 - \lambda P_1)y + (\lambda^2 + P_3^2 - P_1^2 - P_2^2)z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 & 2(P_1P_2 + \lambda P_3) & 2(P_1P_3 - \lambda P_2) \\ 2(P_1P_2 - \lambda P_3) & \lambda^2 + P_2^2 - P_1^2 - P_3^2 & 2(P_2P_3 + \lambda P_1) \\ 2(P_1P_3 + \lambda P_2) & 2(P_2P_3 - \lambda P_1) & \lambda^2 + P_3^2 - P_1^2 - P_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow C$ 方向余弦矩阵

3.4 四元数转动变换的两种形式

如果一个矢量 $\boldsymbol{V}$ 固定，坐标系旋转按照四元数 $\boldsymbol{q}$ 进行了旋转，得到了一个新坐标系，则该矢量分别在新旧坐标系中投影表达式间的关系借助映像方式可以表示为：

$$V_e' = q^{-1} \circ V_e \circ q$$

如果一个坐标系固定,一个矢量 $\boldsymbol{V_E}$ 按照四元数 $\boldsymbol{q}$ 相对该坐标系进行了转动，得到一个新的矢量 $\boldsymbol{V_E}'$，则新旧矢量之间的关系为：

$$V_E' = q \circ V_E \circ q^{-1}$$

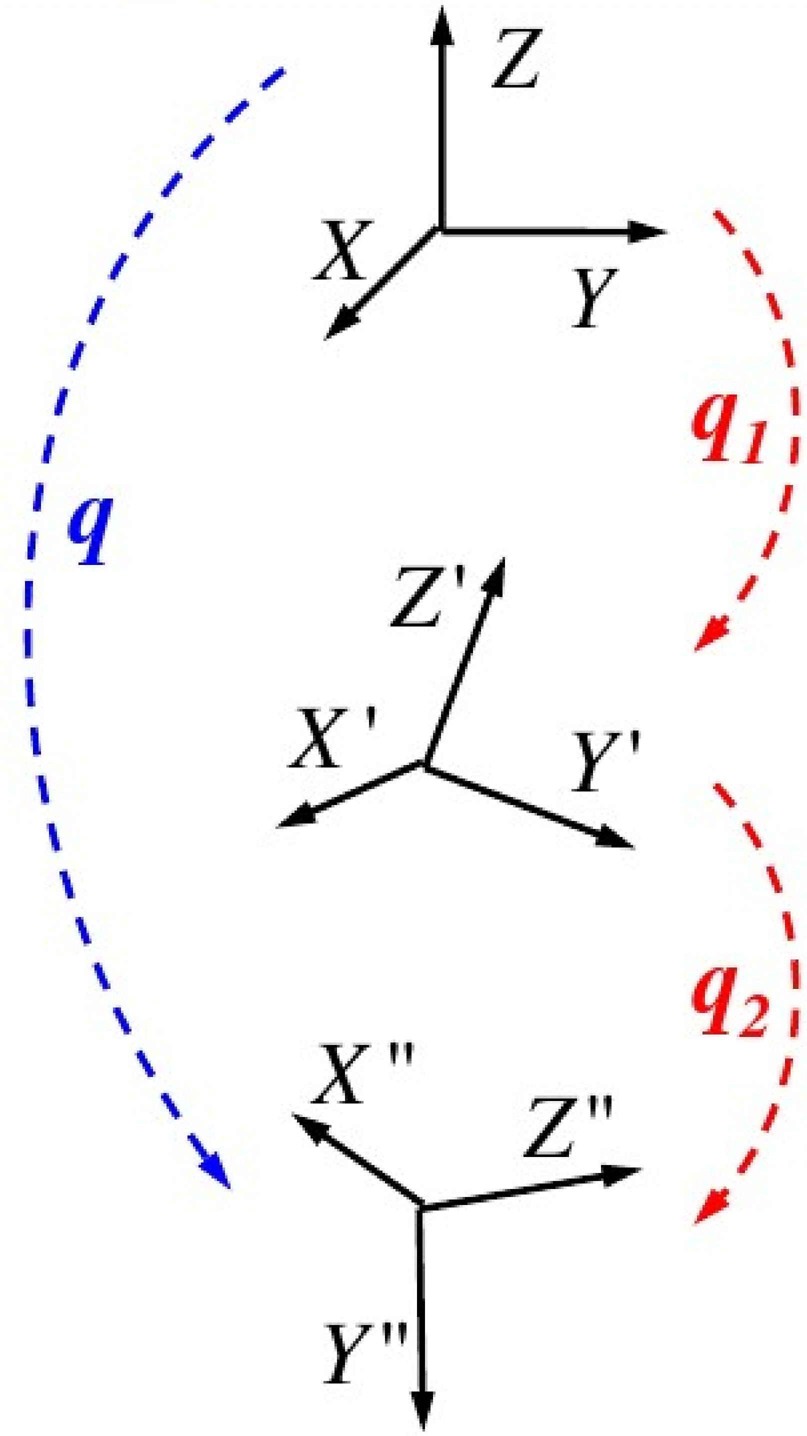
Outline

- 四元数的定义
- 四元数的运算
- 利用四元数进行旋转变换
- 利用四元数进行旋转合成

4.0*转动四元数的合成

连续的多次转动可以等效成一次转动.

假设四元数 q_1 和 q_2 分别代表第一次和第二次坐标系旋转.



则合成后的转动四元数 q 可以表示成:

$$q = q_1 \circ q_2$$

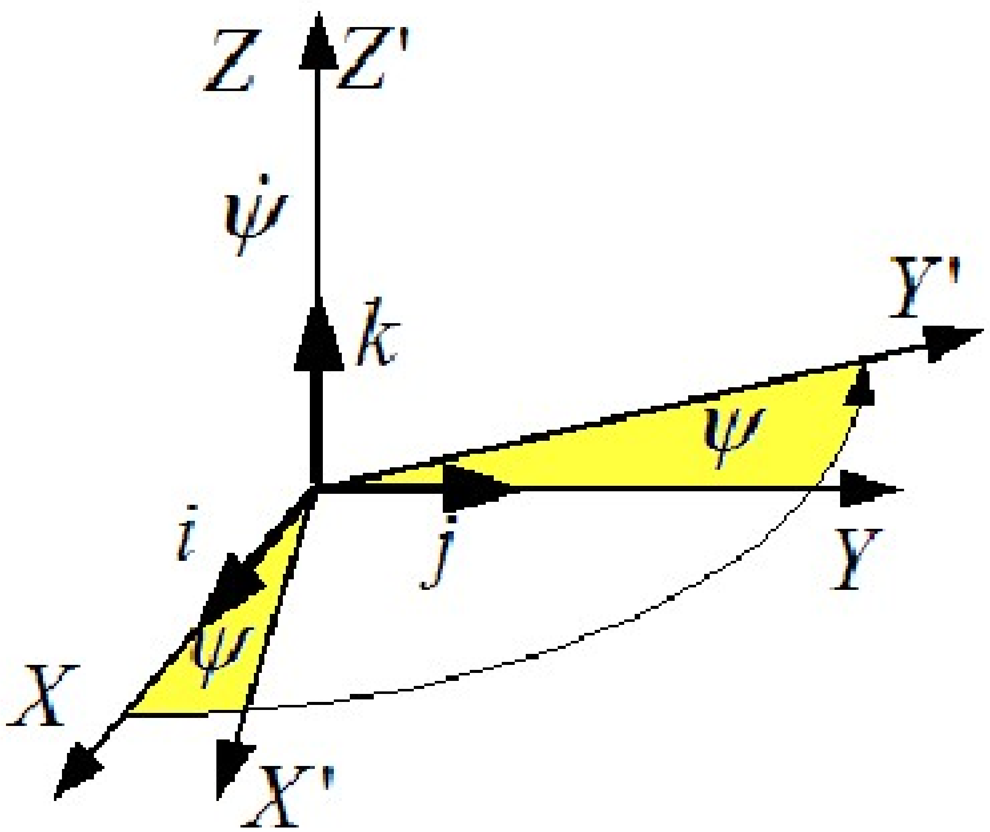
其中 q_1 和 q_2 的轴必须表示成映像形式.

若 q_1 和 q_2 的轴都表示在原来坐标系中, 则

$$q = q_2 \circ q_1$$

4.1四元数合成例子: 非映像方式

坐标系顺序旋转情况下四元数的合成



坐标系 *OX'Y'Z'* 相对坐标系 ***OXYZ*** 多次旋转

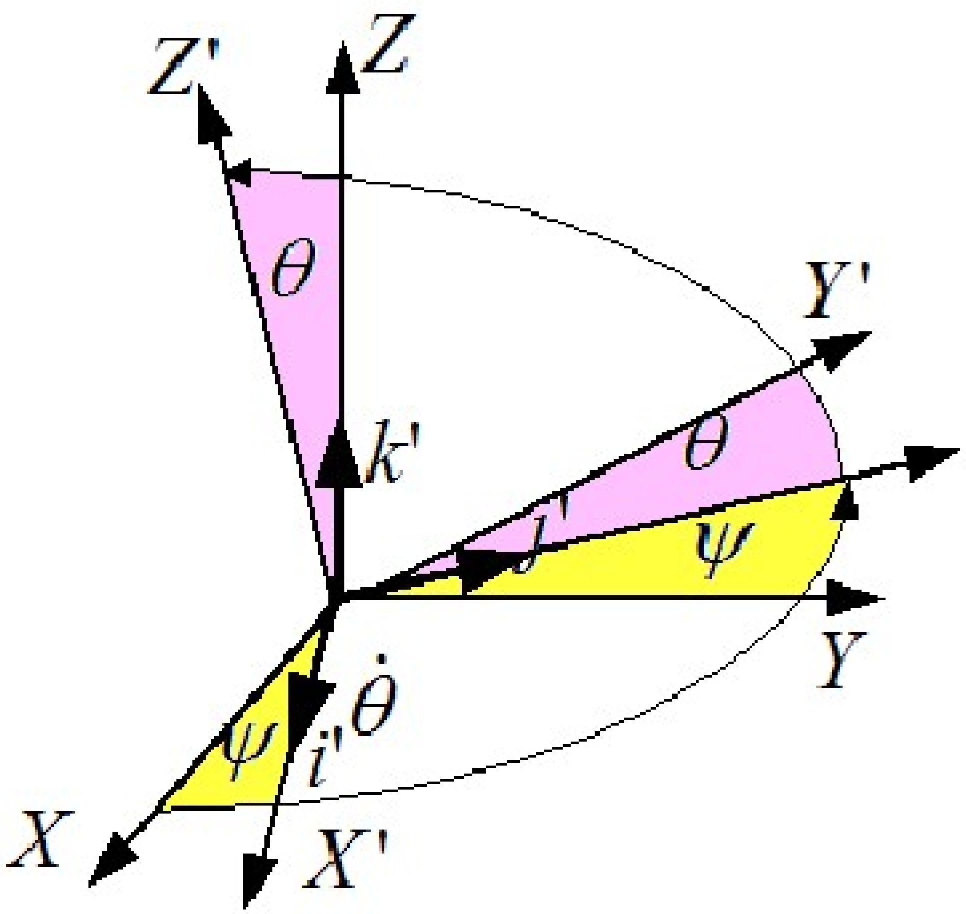
首先, 绕 ***Z*** 轴转过角度 ψ, 瞬时转轴 ***n*** 和 ***k*** 轴重合, 则

$$\vec{n}_1 = k$$

$$q_1 = \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cdot k$$

4.1 四元数合成: 非映像方式

第二次旋转: 绕 X' 转过角度θ, 旋转轴 n 表示为:



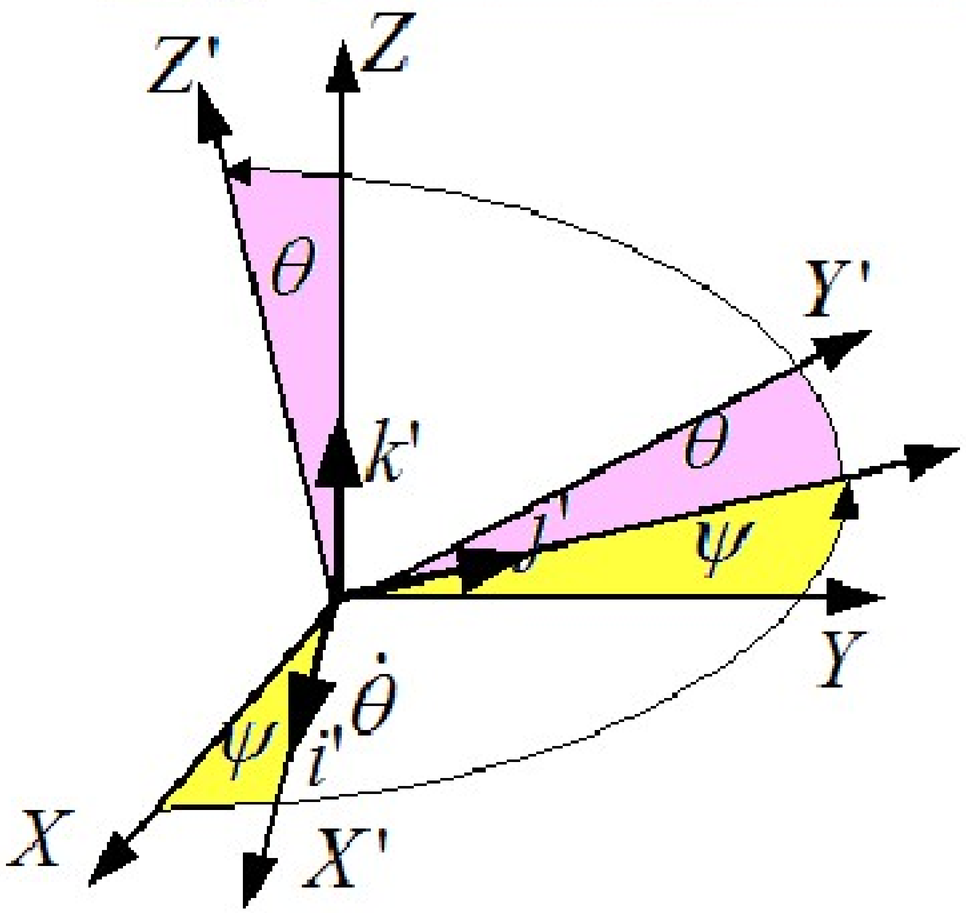
$$\vec{n}_2 = i' = \cos\psi \cdot i + \sin\psi \cdot j$$

对应的四元数:

$$q_2 = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \vec{n}_2$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\cos\psi \cdot i + \sin\psi \cdot j)$$

4.1 四元数合成: 映像的方式



$$q_1 = \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cdot k$$

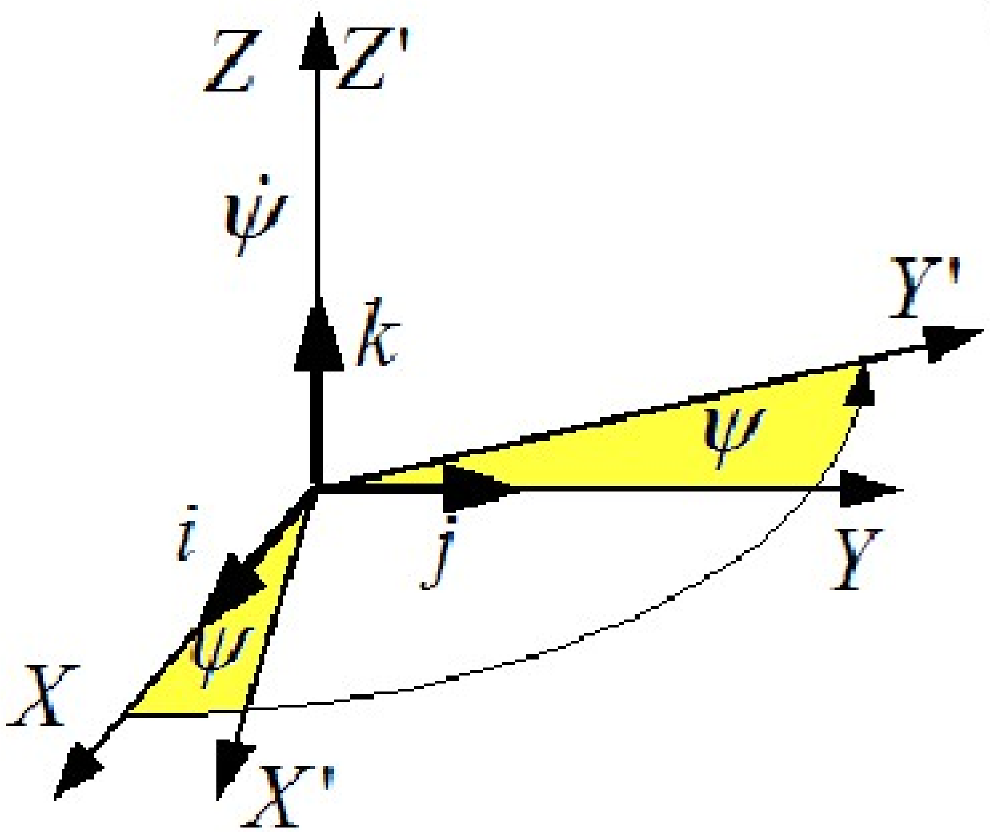
$$q_2 = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\cos\psi\cdot i + \sin\psi\cdot j)$$

这里 q_1 和 q_2 的转动轴表示为非映像的形式, 因此合成的四元数为:

$$q = q_2 \circ q_1 = \left[\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\cos\psi\cdot i + \sin\psi\cdot j)\right]\circ\left[\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cdot k\right]$$

转动次数越多，合成后四元数的表达式会愈发复杂

4.2*四元数合成: 映像的方式



每次转动的瞬时转轴都以映像方式给出.

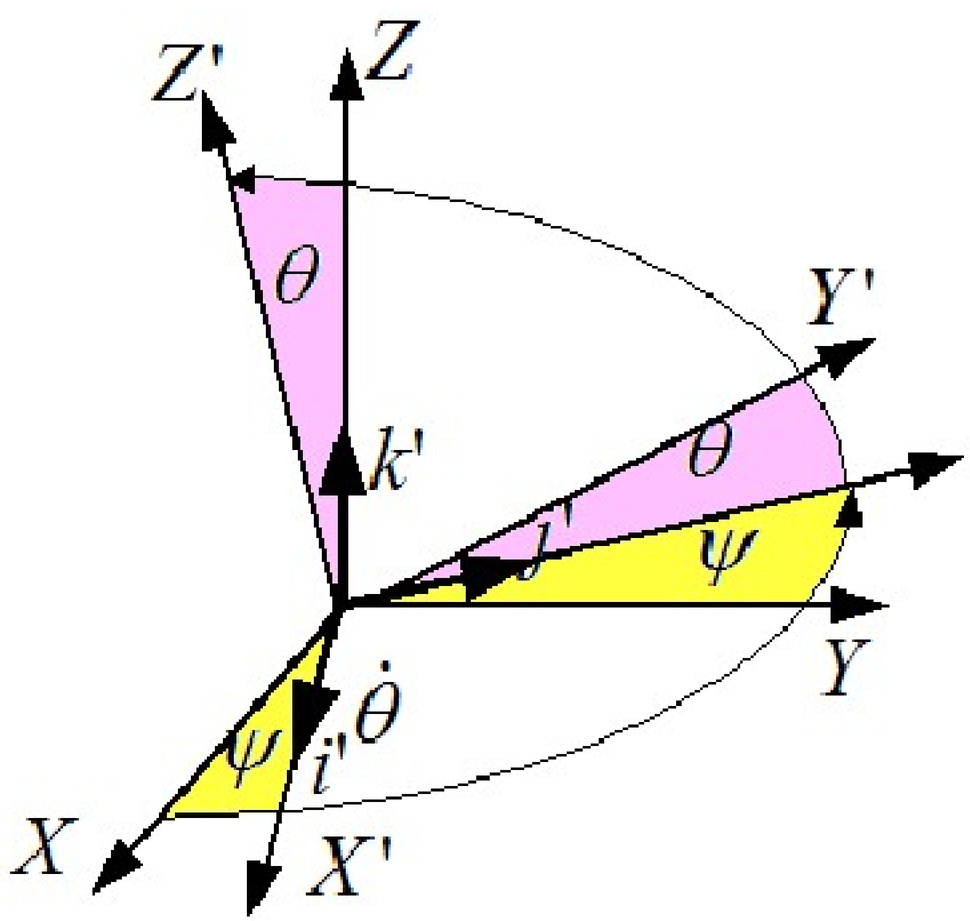
对第一次转动, 瞬时转轴 $\boldsymbol{n_1}$ 的映像方式和非映像方式相同:

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_{e1} = k$$

因此

$$q_1 = \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2} \cdot k$$

4.2 四元数合成: 映像的方式



第二次转动绕着 **O*X'*** 转过了θ

转轴 n_2 沿着 OX'

$$\vec{n}_2 = i'$$

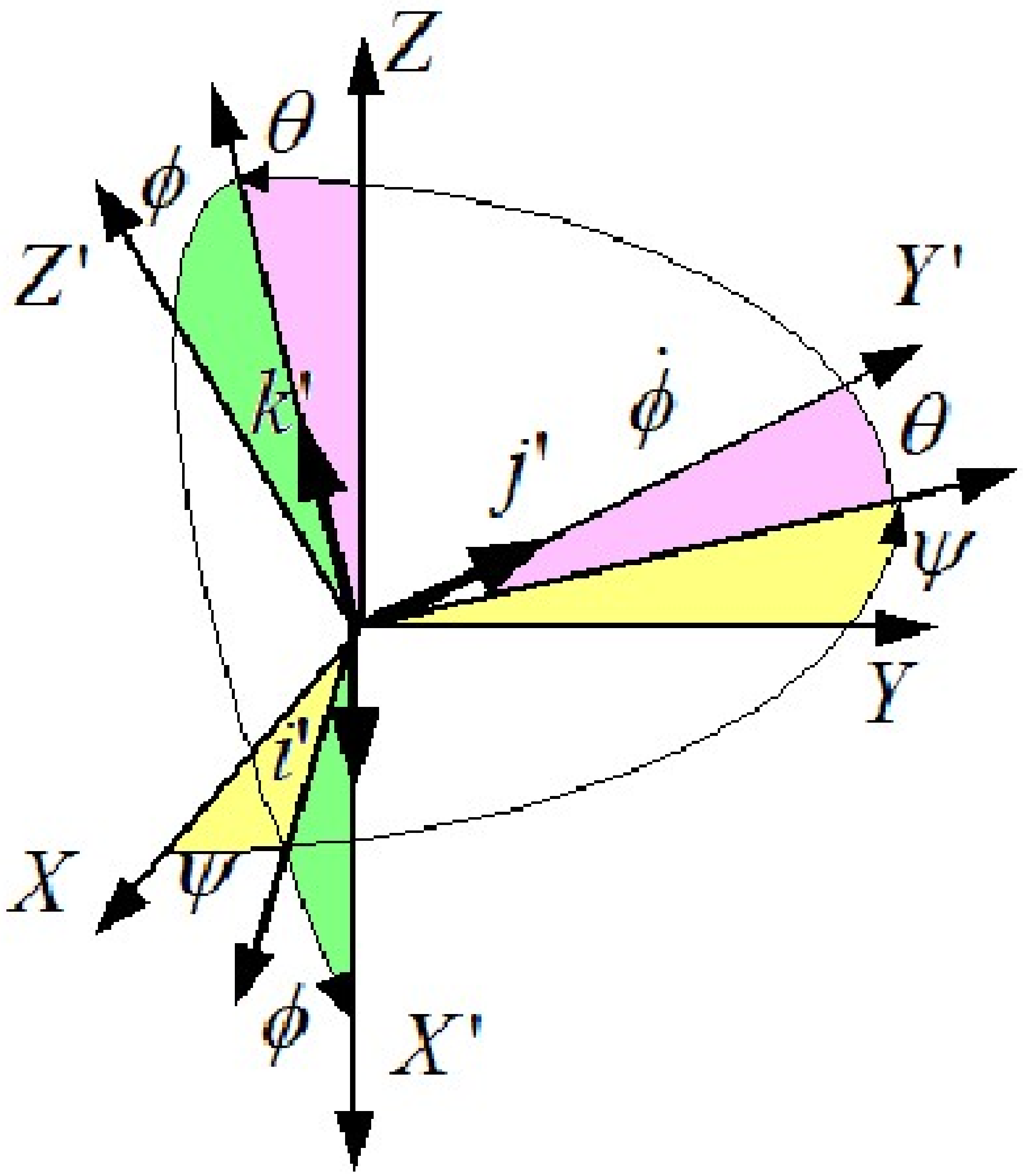
n_2 在坐标系 $X'Y'Z'$ 中的映像为:

$$\vec{n}_{e2} = i$$

因此 q_2 的映像形式为

$$q_2 = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot\vec{n}_{e2} \;= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot i$$

4.2 四元数合成: 映像的方式



第三次转动绕着 *OY'* 轴转过 φ.

转轴 n_3 沿着 *OY'*

$$\vec{n}_3 = j'$$

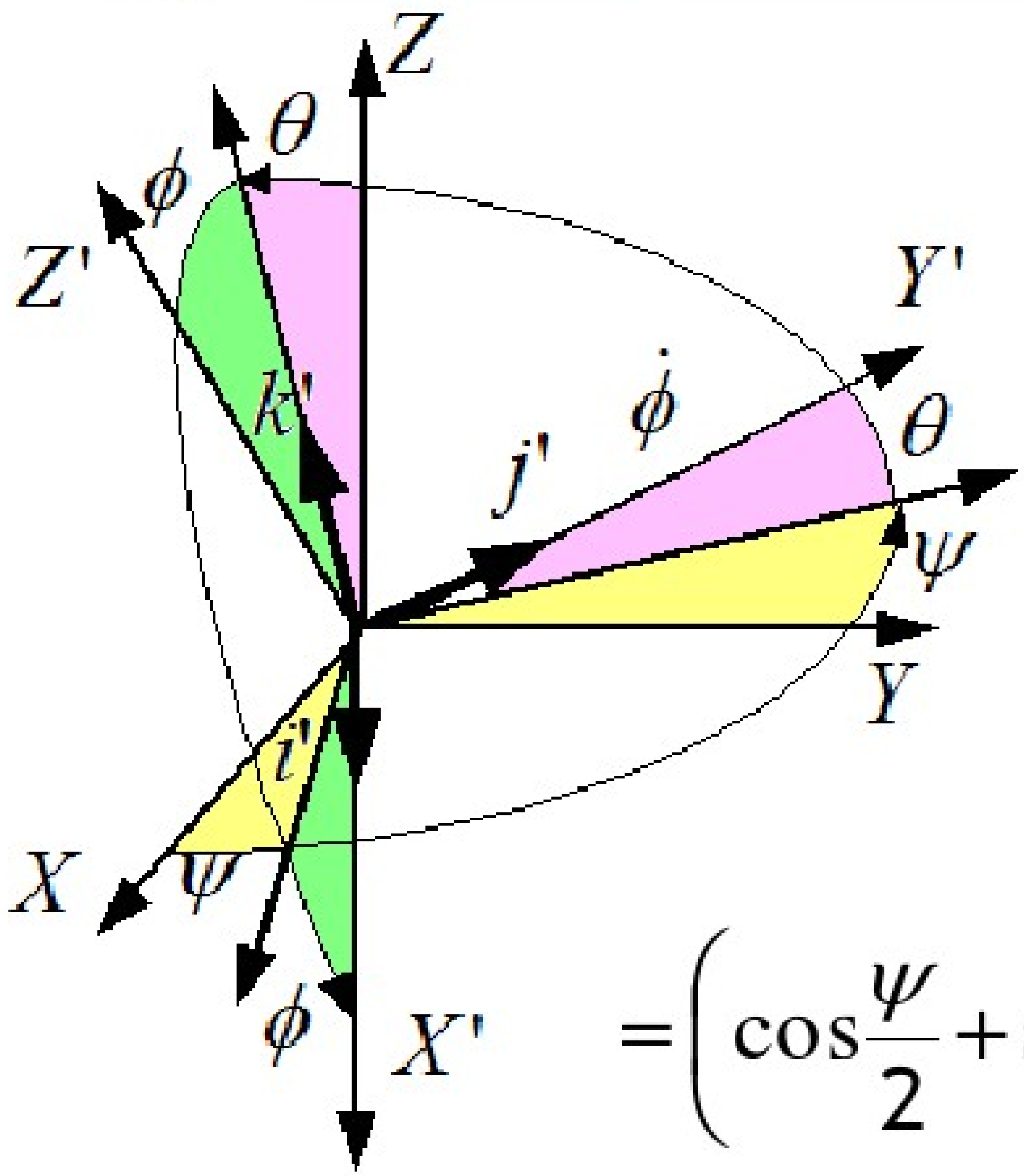
轴 *OY'* 是由原来坐标系的 *OY* 轴转动得到的，因此 n_3 的映像形式为:

$$\vec{n}_{e3} = j$$

这样，四元数 q_3 的映像形式为

$$q_3 = \cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cdot\vec{n}_{e3} = \cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cdot j$$

4.2 四元数合成: 映像的方式



因为 q_1, q_2 和 q_3 都表示成了映像的形式, 所以合成的四元数 q 的计算公式为:

$$q = q_1 \circ q_2 \circ q_3$$

$$= \left(\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cdot k\right) \circ \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot i\right) \circ \left(\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cdot j\right)$$

由 q 可以进一步得到合成转动对应的方向余弦矩阵

Outline

欧拉角的定义

欧拉角性质

应用

5.0*静态的定义

对于在三维空间里的一个参考系，任何坐标系的取向，都可以用三个欧拉角来表现。参考系又称为实验室参考系，是静止不动的。而坐标系则固定于刚体，随着刚体的旋转而旋转。

参阅右图。设定 **xyz-**轴为参考系的参考轴。称 **xy-**平面与 **XY-**平面的相交为交点线，用英文字母（N）代表。 **z x z** 顺规的欧拉角可以静态地这样定义：

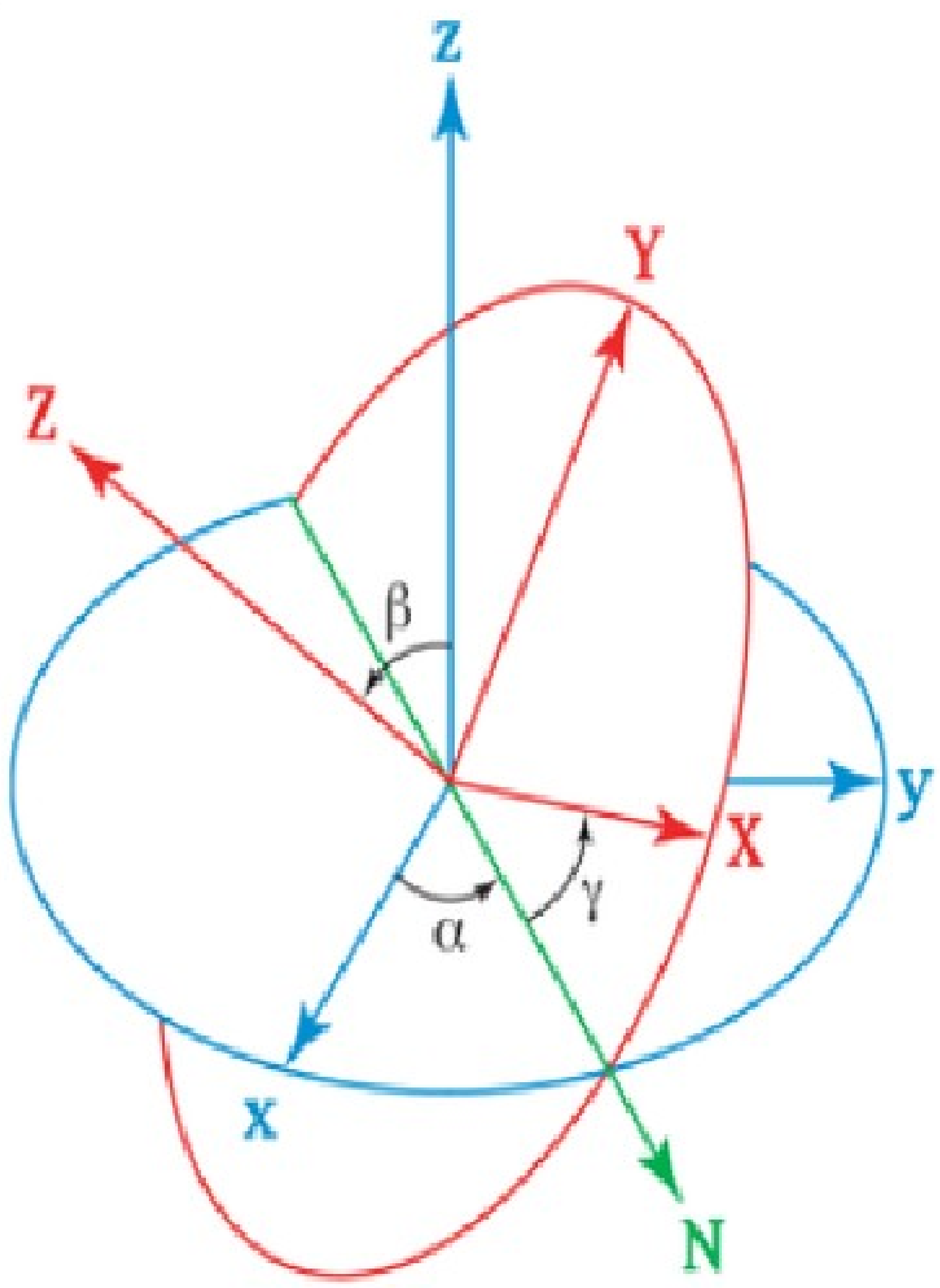
α 是 **x-**轴与交点线的夹角，

β 是 **z-**轴与**Z-**轴的夹角，

γ 是交点线与**X-**轴的夹角。

很可惜地，对于夹角的顺序和标记，夹角的两个轴的指定，并没有任何常规。科学家对此从未达成共识。每当用到欧拉角时，我们必须明确的表示出夹角的顺序，指定其参考轴。

实际上，有许多方法可以设定两个坐标系的相对取向。欧拉角方法只是其中的一种。此外，不同的作者会用不同组合的欧拉角来描述，或用不同的名字表示同样的欧拉角。因此，使用欧拉角前，必须先做好明确的定义。



三个欧拉角：(α, β, γ)。蓝色的轴是 xyz-轴，红色的轴是 XYZ-坐标轴。绿色的线是交点线 (N)。

5.1.1*静态的定义

角值范围

1.α,β值从 0 至 2π 弧度。

2.β 值从 0 至 π 弧度。

对应于每一个取向，设定的一组欧拉角都是独特唯一的；除了某些例外：
两组欧拉角的 α，一个是 0，一个是 2π，而 β 与 γ 分别相等，则此两组欧拉角都描述同样的取向。
两组欧拉角的 γ，一个是 0，一个是 2π，而 α 与 β 分别相等，则此两组欧拉角都描述同样的取向。
旋转矩阵
前面提到，设定刚体取向的旋转矩阵 是由三个基本旋转矩阵合成的：

$$[\mathrm{R}] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.1 .2*静态的定义

单独分开作用，每个矩阵各自代表绕着其转动轴的旋转；但是，当它们照次序相乘，

1.最里面的(最右的) 矩阵代表绕着 z 轴的旋转。
2.最外面的(最左的) 矩阵代表绕着 Z 轴的旋转。
3.在中间的矩阵代表绕着交点线的旋转。

经过一番运算，

$$[\mathbf{R}]=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\alpha\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma\\ -\cos\alpha\sin\gamma-\cos\beta\sin\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma+\cos\beta\cos\alpha\cos\gamma & \sin\beta\cos\gamma\\ \sin\beta\sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha & \cos\beta\end{bmatrix}$$

$[\mathbf{R}]$ 的逆矩阵是：

$$[\mathbf{R}]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma-\cos\beta\sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\alpha\\ \sin\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma+\cos\beta\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\beta\cos\alpha\\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta\end{bmatrix}$$

别种顺序
在经典力学里，时常用 zxz 顺规来设定欧拉角；照着第二个转动轴的轴名，简称为 x 顺规。另外，还有别种欧拉角组。合法的欧拉
角组中，唯一的限制是，任何两个连续的旋转，必须绕着不同的转动轴旋转。因此，一共有 12 种顺规。例如，y 顺规，第二个转
动轴是 y-轴，时常用在量子力学，核子物理学，粒子物理学。另外，还有一种顺规，xyz 顺规，是用在航空航天工程学；参阅Tait-Bryan angles。

5.2*动态的定义

我们也可以给予欧拉角两种不同的动态定义。一种是绕着固定于刚体的坐标轴的三个旋转的复合；另外一种是绕着实验室参考轴的三个旋转的复合。用动态的定义，我们能更了解，欧拉角在物理上的含义与应用。特别注意，以下的描述，XYZ 坐标轴是旋转的刚体坐标轴；而 xyz 坐标轴是静止不动的实验室参考轴。

A) 绕着 XYZ 坐标轴旋转：最初，两个坐标系统 xyz 与 XYZ 的坐标轴都是重叠著的。开始先绕着 Z-轴旋转 角值。然后，绕着 X-轴旋转 角值。最后，绕着 Z-轴作角值 的旋转。

B) 绕着 xyz 坐标轴旋转：最初，两个坐标系统 xyz 与 XYZ 的坐标轴都是重叠著的。开始先绕着 z-轴旋转 角值。然后，绕着 x-轴旋转 角值。最后，绕着 z-轴作角值 的旋转。

参阅欧拉角图，定义 A 与静态定义的相等，这可以直接用几何制图方法来核对。

定义 A 与定义 B 的相等可以用旋转矩阵来证明：

思考任何一点 ，在 xyz 与 XYZ 坐标系统的坐标分别为 与 。定义角算符 为绕着 Z-轴旋转 角值。那么，定义 A 可以表述如下：

$$\mathrm{R}_1 = Z(\gamma) \circ X(\beta) \circ Z(\alpha) \circ \mathrm{r}_1 。$$

5.2.1*动态的定义

用旋转矩阵表示,

$$Z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$X(\beta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$

$$Z(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}。$$

思考任何一点 P2，在 xyz 与 XYZ 坐标系统的坐标分别为 r2与R2 。定义角算符 z(α)为绕着 z-轴旋转α 角值。则定义 B 可
以表述如下:

$$\mathbf{r}_2=z(\alpha)\circ x(\beta)\circ z(\gamma)\circ \mathbf{R}_2。$$

5.2.2 *动态的定义

用旋转矩阵表示，

$$z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$x(\beta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix},$$

$$z(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}。$$

假设，$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$，那么，

$$\mathbf{r}_1=z(\alpha)\circ x(\beta)\circ z(\gamma)\circ\mathbf{R}_2。$$

乘以逆算符，

$$z^{-1}(\gamma)\circ x^{-1}(\beta)\circ z^{-1}(\alpha)\circ\mathrm{r}_1=z^{-1}(\gamma)\circ x^{-1}(\beta)\circ z^{-1}(\alpha)\circ z(\alpha)\circ x(\beta)\circ z(\gamma)\circ\mathrm{R}_2。$$

但是，从旋转矩阵可以观察出，

$$z^{-1}(\alpha)=Z(\alpha),$$
$$x^{-1}(\beta)=X(\beta),$$
$$z^{-1}(\gamma)=Z(\gamma)。$$

所以，

$$Z(\gamma)\circ X(\beta)\circ Z(\alpha)\circ\mathrm{r}_1=\mathrm{R}_2,$$
$$\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2。$$

定义 A 与定义 B 是相等的。

5.3 *欧拉角性质

欧拉角在SO(3)上，形成了一个坐标卡(chart)；SO(3)是在三维空间里的旋转的特殊正交群。这坐标卡是平滑的，除了一个极坐标式的奇点在 $\beta=0$ 。

类似的三个角的分解也可以应用到SU(2)；复数二维空间里旋转的特殊酉群；这里，β 值在 0 与 2π 之间。这些角也称为欧拉角。

5.4*应用

欧拉角广泛地被应用于经典力学中的刚体研究，与量子力学中的角动量研究。

在刚体的问题上, xyz 坐标系是全局坐标系， XYZ 坐标系是局部坐标系。全局坐标系是不动的；而局部坐标系牢嵌于刚体内。关于动能的演算，通常用局部坐标系比较简易；因为，惯性张量不随时间而改变。如果将惯性张量（有九个分量，其中六个是独立的）对角线化，那么，会得到一组主轴，以及一个转动惯量（只有三个分量）。

在量子力学里，详尽的描述SO(3)的形式，对于精准的演算，是非常重要的，并且几乎所有研究都采用欧拉角为工具。在早期的量子力学研究，对于抽象群理论方法(称为Gruppenpest)，物理学家与化学家仍旧持有极尖锐的反对态度的时候；对欧拉角的信赖，在基本理论研究来说，是必要的。

欧拉角的哈尔测度有一个简单的形式 $\sin\beta\, d\alpha d\beta d\gamma$ 通常在前面添上归一化因子 $\pi^2/8$。例如，我们要生成均匀随机取向，使 α, γ 从 0 至 2π 均匀的选随机值；使 $\beta = \arccos(z)$ ，z 从 - 1 至 1 均匀的选随机值。

单位四元数，又称欧拉参数，提供另外一种方法来表述三维旋转。这与特殊酉群的描述是等价的。四元数方法用在大多数的演算会比较快捷，概念上比较容易理解，并能避免一些技术上的问题，如万向节锁 (gimbal lock) 现象。因为这些原因，许多高速度三维图形程式制作都使用四元数。

Thank you !