矩阵A正定，如何证明A的逆矩阵和伴随矩阵也正定? https://www.zhihu.com/question/605881267/answer/3075609886

东四王丁

存在正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，特征值是 λ，特征向量是x，所以 $Ax=\lambda x$

对A的逆矩阵， $x=\lambda A^{-1}x$，所以 $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$，特征值是倒数，特征向量和 A 的相同

所以 A 和 A^{-1} 的正交矩阵也相同都是 P，则 $P^{-1}A^{-1}P=\Lambda^{-1}$

$\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$， $\Lambda^{-1}=diag\{\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},...,\frac{1}{\lambda_n}\}$

所以A的逆矩阵 A^{-1} 也是正定的

根据伴随矩阵的定义： $AA^*=|A|E$，所以 $A^*=|A|A^{-1}$

上面已经推的： $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$，所以 $A^*x=|A|A^{-1}x=\frac{|A|}{\lambda}x$

矩阵A的伴随矩阵 A^*，特征值是倒数然后乘以|A|，特征向量和A的相同

所以 A 和A^*的正交矩阵也相同都是 P，则 $P^{-1}A^*P=|A|\Lambda^{-1}$

这里的 $|A|\Lambda^{-1}=diag\{\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},...,\frac{|A|}{\lambda_n}\}$

所以A的伴随矩阵 A^* 也是正定的

编辑于 2023-06-16 06:29 · IP 属地上海